

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

LESLLI ADRIANI MENDONÇA PEROZA

O CONCEITO DE FRAÇÕES E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ALUNOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA

2021

LESLLI ADRIANI MENDONÇA PEROZA

O CONCEITO DE FRAÇÕES E OS SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ALUNOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Rio Grande, campus de Santo Antônio da Patrulha, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Ciências Exatas sob orientação da Prof^a. Dr^a Patrícia Ignácio.

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA

2021

LESLLI ADRIANI MENDONÇA PEROZA

**O CONCEITO DE FRAÇÕES E OS SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS: UMA
SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA ALUNOS DO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDA-
MENTAL**

Trabalho de Conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Rio Grande, campus de Santo Antônio da Patrulha, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Ciências Exatas sob orientação da Prof^a. Dr^a Patrícia Ignácio.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Patrícia Ignácio (orientadora)
Universidade Federal do Rio Grande - FURG/SAP

Prof. Dr. Leandro Sebben Bellicanta
Universidade Federal do Rio Grande - FURG/SAP

Prof. Dr. Lucas Nunes Ogliari
Universidade Federal do Rio Grande - FURG/SAP

SANTO ANTÔNIO DA PATRULHA

2021

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Prof. Dr^a. Patrícia Ignácio por toda orientação durante a escrita deste trabalho. E também pelos cinco anos de orientações e ensinamentos em suas aulas e projetos que participei como bolsista de pesquisa e de ensino. Por sempre acreditar na minha capacidade e aconselhar para que pudesse continuar a minha jornada acadêmica.

Aos meus pais e meu irmão, Rosemari, Adriano e Wesley pelo apoio, financeiro e emocional, e carinho durante esses anos.

À minha irmã, Rethiele, que de uma forma ou outra sempre me incentivou durante a minha caminhada dentro da Universidade, e pelas conversas que tivemos sobre educação ao longo desses cinco anos.

Ao meu namorado, Sandro, por todo apoio, carinho, conversas, conselhos e o incentivo para que concluísse essa jornada.

Aos amigos da FURG, Adriano, Aline e Larissa, por todas as conversas, estudos e auxílio nas disciplinas e situações que passamos juntos dentro da Universidade.

Aos professores da banca avaliadora do projeto de Trabalho de Conclusão de Curso Prof. Leandro Sebben Bellicanta e Prof. Lucas Nunes Ogliari, pelas contribuições dadas a este trabalho, e aos mesmos pela avaliação deste trabalho.

A Universidade Federal do Rio Grande, pelo ensino gratuito e de qualidade.

Por fim, agradeço a todos os professores e pessoas que colaboraram durante a minha formação para o meu ensino e conhecimento, para a chegada deste momento.

RESUMO

As discussões que cercam o ensino das frações são muitos, algumas se referem ao ensino e aprendizagem e outros ao próprio conceito. Por vezes, nos limitamos a ensiná-las utilizando apenas um significado, quando temos, pelo menos cinco destes a serem discutidos. Na esteira desse entendimento, a presente pesquisa tem como objetivo propor uma Sequência Didática para o ensino de frações, envolvendo os diferentes significados atribuídos aos números fracionários, pensando em estratégias de ensino e utilizando ferramentas metodológicas que auxiliem os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental a visualizar e compreender tais significados. Os autores que contribuíram com as discussões acerca deste assunto foram: Lima (2014), Magina, Bezerra e Spinillo (2009), Campos e Rodrigues (2007) e Silva (2005), entre outros. A metodologia utilizada foi qualitativa, de caráter bibliográfico e documental, a qual se deu com base em diferentes materiais científicos e pedagógicos. As discussões propostas deram embasamento à elaboração da Sequência Didática, a qual foi dividida em três etapas: sondagem, conceito de fração e seus significados e avaliação. O resultado do presente trabalho foi a construção dessa sequência de atividades, propondo novas discussões, percepções e criando possibilidades de trabalho para os professores da Matemática da Educação Básica.

Palavras-chave: Fração; Sequência didática; Ensino de frações; Conceito de frações; Ensino de matemática.

ABSTRACT

The discussions surrounding the teaching of fractions are many, some referring to teaching and learning and others to the concept itself. Sometimes we limit ourselves to teaching them using only one meaning, when we have at least five of these to be discussed. In the wake of this understanding, this research aims to propose a Didactic Sequence for the teaching of fractions, involving the different meanings attributed to fractional numbers, thinking about teaching strategies and using methodological tools that help 6th grade students. Fundamental to visualize and understand such meanings. The authors who contributed to the discussions on this subject were: Lima (2014), Magina, Bezerra and Spinillo (2009), Campos and Rodrigues (2007) and Silva (2005), among others. The methodology used was qualitative, bibliographical and documentary, which was based on different scientific and pedagogical materials. The proposed discussions supported the elaboration of the Didactic Sequence, which was divided into three stages: survey, concept of fraction and its meanings, and evaluation. The result of the present work was the construction of this sequence of activities, proposing new discussions, perceptions and creating work possibilities for Basic Education Mathematics teachers.

Keywords: Fraction; Following teaching; Teaching fraction; Fractions concept; Mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Representação geométrica e simbólica em relação ao significado parte-todo.....	24
FIGURA 2: Tarefa sobre fração em relação ao significado de razão.....	26
FIGURA 3: Tarefa sobre fração em relação ao significado de operador	27
FIGURA 4: Competências específicas da área da Matemática no Ensino Fundamental.....	29
FIGURA 5: Desenhos geométricos para representar o significado de parte-todo.....	38
FIGURA 6: Reta numérica dividida em seis partes	40
FIGURA 7: Pizza dividida em oito pedaços.....	44
FIGURA 8: Esquema de divisão de grupos para cada significado e atividade	48
FIGURA 9: Quadrado de lados 9 cm e 3 cm , respectivamente.....	57
FIGURA 10: Reta numérica com distância entre 0 e 1	59
FIGURA 11: Azulejo dividido em nove partes iguais com quatro delas pintadas	59

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: Tabela com Teses e Dissertações escolhidas	16
TABELA 2: Tabela para utilizar na atividade para medir com tiras de papéis.....	51
TABELA 3: Tabela para utilizar na atividade para medir com a régua.....	51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 METODOLOGIA	13
3 REFERÊNCIAL TEÓRICO	22
3.1 Histórias dos números fracionários	22
3.2 Os diferentes significados dos números fracionários	22
3.2.1 Parte-todo	23
3.2.2 Medida	24
3.2.3 Quociente	25
3.2.4 Razão	25
3.2.5 Operador	26
3.3 Frações na BNCC	27
3.4 Dificuldades no ensino de frações	31
4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA	35
4.1 Etapa 1 - Sondagem	36
4.2 Etapa 2 – Conceito de frações e seus significados	46
4.3 Etapa 3 – Avaliação	58
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

Quando ouvimos ou lemos qualquer palavra, logo nos vem à mente um imaginário que faz compor um conjunto de ideias e significados sobre ela. É possível que, ao ouvir a palavra fração, consigamos pensar em chocolates, pizzas, tiras de papéis e, também, parte do todo. De imediato, a palavra fração me faz recordar a forma como tive e tenho aprendido frações ao longo de minha vida escolar e acadêmica.

Além do significado de parte-todo, de acordo com os autores Campos e Rodrigues (2007) e Magina, Bezerra e Spinillo (2009), Lima (2014) e Silva (2005), há cinco significados diferentes que podem ser atribuídos ao conceito de frações: (i) o significado de parte todo, cuja representação é uma parte de um todo dividido; (ii) o significado de medida, que está associado à comparação entre grandezas; (iii) o significado de razão, associado ao conceito de probabilidade, do qual a razão entre duas grandezas é expressa na forma fracionária; (iv) o significado de quociente, que representa uma divisão; e (v) o significado de operador multiplicativo, que tem como objetivo atuar sobre uma quantidade, transformando-a em uma nova.

Ao ter contato com disciplinas do Curso de Licenciatura em Ciências Exatas, com livros didáticos, com as escolas do município de Santo Antônio da Patrulha/RS e ao participar do “Projeto de Desenvolvimento da Matemática”, orientado pela Técnica Educacional em Matemática Patrícia da Silva, no ano de 2018, pude perceber que, alguns significados acerca das frações são mais comuns no espaço da escola do que outros.

Por ter contato com diferentes realidades, percebia e me questionava o porquê dos alunos/acadêmicos terem dificuldades com este conteúdo. Conforme Garibotti (2019) existem vários fatores que interferem na aprendizagem do aluno e fazem com que eles tenham obstáculos ao entenderem e aprenderem alguns conteúdos. Partindo desse entendimento, esse conjunto de signos e significados me fizeram pensar sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem que envolvem o conceito de fração, em como operá-las e porque o índice de aprendizagem de Matemática tem sido baixo, de acordo com as avaliações dos estudantes do Ensino Básico.

Exemplificando o que foi dito anteriormente, Mamede (2011, p. 1) mostra fatores que podem causar conflitos no ensino de frações:

[...] o facto dos alunos considerarem as magnitudes definidas no numerador e denominador separadamente, em vez de as entenderem como as representações de um número. Outra dificuldade muito comum que os alunos apresentam diz respeito à necessidade de utilizar relações multiplicativas na comparação de frações. Uma outra dificuldade frequentemente identificada nos alunos prende-se com a compreensão da propriedade de densidade de conjunto de que goza o conjunto dos números racionais.

Por conta da complexidade que os números fracionários podem ter, existem muitas metodologias de ensino que podem suprir as necessidades provenientes deste assunto. Dessa forma, a pergunta que se fez foi: como propor o ensino do conceito de frações, utilizando os diferentes significados a elas atribuídos, com a finalidade de que os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental sejam capazes de compreendê-las?

Uma estratégia didática que pode ser utilizada é a Sequência Didática, que tem objetivos bem específicos, os quais podem ser entendidos no trecho de Carvalho (2017, p. 47).

(...) a Sequência Didática é aquela que é determinada pela série ordenada e articulada de atividades. Não só pelas atividades, mas também sua maneira de se articular são traços diferenciais que determinam a especificidade de uma proposta didática.

A partir dessa explicação de Carvalho (2017), podemos estruturar a Sequência Didática de forma a compor o processo de ensino e propor ações efetivas de aprendizagem sobre o conceito de frações.

Portanto, o objetivo deste trabalho é propor uma Sequência Didática para o ensino de frações, envolvendo os diferentes significados atribuídos aos números fracionários, pensando em estratégias de ensino e utilizando ferramentas metodológicas que auxiliem os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental a visualizar e compreender tais significados.

Por entender que existem diferentes possibilidades sobre o Ensino de Frações, esta pesquisa se caracteriza qualitativa de caráter bibliográfico e documental, referenciada por Lima (2014), Magina, Bezerra e Spinillo (2009), Campos e Rodrigues (2007) e Silva (2005) no que diz respeito aos diferentes significados atribuídos

às frações. Os autores que dão embasamento sobre a metodologia de ensino escolhida, neste caso à Sequência Didática, são: Bezerra (2001) e Nascimento (2018). Para compor o conjunto de atividades, foram consultados: livros didáticos, portais de Matemática e outras referências como caderno de atividades, os quais estão descritos ao longo do texto.

Para delinear os aspectos abordados neste estudo, estruturamos o texto em cinco capítulos. No primeiro capítulo, *Introdução*, apresentamos ao leitor as discussões sobre o ensino de frações, indicando os possíveis significados atrelados a elas, seguidas do objetivo e da pergunta de pesquisa. O segundo capítulo, *Metodologia*, temos os pressupostos teóricos que dão sustentação para a elaboração da Sequência Didática, assim como as discussões sobre este assunto e indicações dos materiais que foram utilizados.

No terceiro capítulo temos o referencial teórico, no qual trazemos breves discussões acerca da história e dos significados atribuídos às frações, a fim de entender como o número fracionário vem sendo construído ao longo dos anos até chegar ao que entendemos deste número hoje em dia. Trazemos também a BNCC, com as habilidades e conhecimentos para dar embasamento às atividades elaboradas na Sequência Didática, a fim de entender o que os documentos legais dizem sobre este assunto. E por fim, as dificuldades no ensino das frações, sendo de extrema importância para compreender quais são e criar possibilidades para serem supridas durante as atividades propostas.

No capítulo quatro, iremos apresentar a Sequência Didática, indicando as atividades e explicando todo o necessário para a sua aplicação. Trouxemos discussões em cada uma das tarefas, com o objetivo de explicá-las e indicar os raciocínios utilizados, a fim de apresentar as possibilidades de cada questão. Logo em seguida, nos encaminhamos para as considerações finais.

2 METODOLOGIA

Com o intuito de propor uma Sequência Didática sobre o ensino de frações, visando o aprendizado dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, se estabeleceu uma pesquisa qualitativa, da qual se preocupou com a compreensão das atividades, objetos do conhecimento e os entendimentos dos alunos em relação ao ensino das frações. Esse tipo de abordagem procura,

(...) explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens (GERHARDT E SILVEIRA, 2009, p. 32).

Com essa citação podemos perceber que a elaboração das atividades não está relacionada com um resultado quantitativo, ou seja, que procura números. Ao final deste trabalho, teremos a elaboração da sequência, com atividades que permitem compreender as aprendizagens e dificuldades em relação ao ensino de frações

A ideia inicial era a aplicação da Sequência Didática, no entanto, com os acontecimentos do ano de 2020, no caso a Pandemia da Covid-19, ficou inviável sua aplicação. Por este motivo, elaborou-se uma Sequência Didática como estratégia de ensino, pensando de que forma professores e professoras do 6º ano podem desenvolvê-la em aulas presenciais. Em vista disso, a metodologia é bibliográfica e documental.

A pesquisa bibliográfica, descrita por Gill (2002), é elaborada com base em materiais já publicados, ou seja, periódicos, dissertações, teses, livros, jornais, revistas e assim por diante. Ela tem a vantagem de o pesquisador ter um campo vasto de lugares, do qual pode buscar e ir agregando fatores ao seu trabalho, podendo desmembrar cada assunto.

Esta pesquisa também tem caráter documental, e pode se assemelhar à bibliográfica. Contudo, na documental as fontes de pesquisa são muito mais diversificadas, podendo usar relatórios, livros, tabelas e outros materiais (Ibid.). Portanto, utilizar essas duas metodologias nos permite englobar outros tipo de materiais, para dar subsídios na elaboração da Sequência Didática.

Ao acessar, os trabalhos e assuntos discutidos sobre o número fracionário no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), decidimos falar sobre os diversos significados que são atribuídos a esse conceito. Consultamos a BNCC para verificar o que ela dizia sobre o assunto e quais deveriam ser as habilidades, as competências e os conhecimentos considerados essenciais no estudo deste conteúdo.

Utilizamos nesta pesquisa a metodologia de ensino da Sequência Didática, por acreditarmos que ela ajudará a chegar ao objetivo proposto. Trouxemos elementos teóricos que deram embasamento a nossa sequência e a estrutura que conduziu as nossas atividades.

Conforme Carvalho (2017), a Sequência Didática teve início na França em 1980, com o intuito de implementar um ensino inovador, contribuindo com o ensino da língua materna. Mesmo sendo criada em uma área diferente, a Sequência Didática mostrou resultados satisfatórios à língua francesa e, desta forma, foi sendo utilizada em áreas como a da Matemática.

O conceito dado por Zabala (2014, p.9) foi o que utilizamos, a fim de discutir sobre a Sequência Didática e como desenvolvê-la:

As sequências de atividades de ensino/aprendizagem, ou de sequências didáticas, são uma maneira de encadear e articular as diferentes atividades ao longo de uma única didática. Assim, pois, poderemos analisar as diferentes formas de intervenção segundo as atividades que se realizem e, principalmente, pelo sentido que adquirem quanto a uma sequência orientada para a realização de determinados objetivos educativos. As sequências podem indicar a função que tem cada uma das atividades na construção do conhecimento ou da aprendizagem de diferentes conteúdos e, portanto, avaliar a pertinência ou não de cada uma delas, a falta de outras ou a ênfase que devemos lhes atribuir.

Este conceito nos permite entender o que é uma Sequência Didática e o que ela propõe, ou seja, ajuda na escolha das atividades para que possamos articulá-las da melhor forma, a fim de alcançar o objetivo. A função desta metodologia é propor uma sequência de atividades que nos permite chegar ao objetivo proposto, e é o que estamos fazendo ao reunir atividades que pensamos ser coerentes e que deem conta de introduzir os cinco significados associados ao conceito de fração.

Ainda, conforme Carvalho (2017), a Sequência Didática têm alguns passos básicos, que dão sustentação à sua elaboração. Esses passos, de acordo com o autor, são: escolha do tema a ser trabalhado; questionamentos sobre a escolha do tema; planejamento dos conteúdos; objetivos a serem atingidos nos processos de ensino e aprendizagem; delimitação da sequência de atividades, levando-se em consideração a organização dos estudantes, o material didático, o cronograma, a integração entre cada atividade e as etapas e a avaliação dos resultados.

Podemos observar que a Sequência Didática não é somente um conjunto de atividades, mas que ela nos permite pensar em tarefas que priorizem alguns fatores, tais como buscar os entendimentos necessários para elaborar as atividades. A partir dessas percepções, podemos pensar em uma organização de atividades que dêem conta do objetivo de ensinar os diferentes significados atribuídos ao conceito de fração no Ensino Fundamental, em turmas de sexto ano.

Após compreender o que os alunos deveriam conhecer/aprender sobre os significados atribuídos ao conceito de frações, nos debruçamos sobre eles com o intuito de trazer atividades que pudessem auxiliar a compreensão desses entendimentos. Portanto, antes de elaborar uma Sequência Didática com os diferentes significados, primeiramente procuramos entender mais sobre eles. Para isso, buscamos sobre o assunto, encontrando trabalhos em que os autores discutiam sobre esse tema. O modo como a pesquisa se desenvolveu foi baseada nos autores Martins, Abreu e Rozek (2020).

Como dito anteriormente, buscamos trabalhos na plataforma CAPES, que resultou em uma revisão sistemática de literatura. Limitamos a busca por um período de dez anos, iniciando-se em 2010. Quanto às palavras-chave utilizadas na busca, com o intuito de delimitar os estudos sobre as frações, foram: “Sequência Didática” e “frações”. A decisão de utilizar essas palavras foi tomada de modo a relacioná-las com esta pesquisa.

A busca resultou em 15745 teses e dissertações. Por conta da grande quantidade de trabalhos encontrados, realizou-se uma busca refinada por: “grande área do conhecimento” e “área do conhecimento”. Nestas, foram selecionados os seguintes tópicos: “Ciências Exatas e da Terra”; “educação, educação de adultos, educação

em periferias urbanas, educação especial, ensino, ensino de ciências e matemática, ensino-aprendizagem, interdisciplinaridade, matemática, planejamento educacional e planejamento urbano e regional”. Totalizando 421 teses e dissertações.

Todos os resumos foram lidos, de modo que, excluimos os trabalhos que não se enquadram no tema do estudo, sendo eles: trabalhos que não tinham como metodologia a Sequência Didática, estudos sobre frações no Ensino Médio, outros conteúdos relacionados à Matemática e a conteúdos de Ciências. Dentre os 421 trabalhos, restaram 23, dos quais foram analisados cuidadosamente com o intuito de explorar as atividades e as Sequências Didáticas propostas.

As dissertações escolhidas, não contribuíram apenas para a elaboração da Sequência Didática, mas também auxiliaram a estruturar o trabalho, consultar referências, e outros pontos que colaboraram na escrita do mesmo. Além de compreender as respectivas características da metodologia de ensino escolhida, foram estudados trabalhos que já tivessem desenvolvido a Sequência Didática envolvendo o ensino de Frações. Pensando em como elaborar atividades que deem conta do nosso objetivo, abaixo temos uma tabela (tabela 1) com as Teses e Dissertações encontradas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, citado anteriormente, que deram suporte à construção da Sequência Didática e da escrita desta pesquisa.

Tabela1 - Tabela com as Teses e Dissertações escolhida

ORD	TEMA	TIPO	AUTOR	ANO
1	Frações: uma abordagem pedagógica.	Dissertação	João Paulo Gondim de Aquino	2013
2	O ensino das frações no Ensino Fundamental e seu reflexo no Ensino Médio.	Dissertação	Sandro Henrique Barbosada Costa	2014

3	Frações: estratégias lúdicas no ensino da Matemática.	Dissertação	Denise Teresa de Camargo Valio	2014
4	Frações e suas operações: resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem.	Dissertação	Rogéria Malacrida Menotti	2014
5	Frações: uma proposta de ensino para o 9 ano utilizando o software Geogebra e dobraduras.	Dissertação	Paola Luciana Correia	2015
6	Formalização dos conjuntos numéricos: contribuição para o ensino de frações e números decimais.	Dissertação	Cleber Alves Côrtes	2015
7	Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações.	Dissertação	José Carlos Aveiro	2015
8	Atividades com robótica educacional para as aulas de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental: utilizando da metodologia <i>LEGO® Zoom Education</i> .	Dissertação	Willian dos Santos Rodrigues	2015

9	Números racionais e suas diferentes representações.	Dissertação	Andréia Caetano da Silva Curty	2016
10	Operações com números inteiros e racionais de forma lúdica.	Dissertação	Marília Caribé Ribeiro Sales	2016
11	Uma sequência didática para o ensino de adição de frações.	Dissertação	Onésimo Rodrigues Pereira	2017
12	Sequência didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração.	Dissertação	Euvaldo de Souza Carvalho	2017
13	Proposta para o ensino de frações para o 7º ano: do diagnóstico a aprendizagem mediada por modelo de barras.	Dissertação	Camila Coppi Cintra	2017
14	Análise de uma proposta pedagógica de construção e aplicação de dominó de frações equivalentes.	Dissertação	Samantha Faasen	2017
15	Aplicação e análise de uma sequência didática sobre frações no Ensino Fundamental II.	Dissertação	Roney Lima do Nascimento	2018

16	Transformando frações em números: uma experiência no Ensino Fundamental.	Dissertação	Izabela Cesario Correa Ananias	2018
17	Números: algumas atividades lúdicas.	Dissertação	Denis Gomes Lima	2018
18	Uma proposta didática com a utilização de jogos, materiais manipulativos e contextualização visando o ensino-aprendizagem de frações.	Dissertação	Isabela Estephaneli Corty Ribeiro	2019
19	O estudo de frações em seus diferentes contextos: um diagnóstico com alunos do 6º ano da Rede Municipal de ensino de Alto Santo – CE	Dissertação	Antônio Eclésio Martins Gomes	2019
20	Uma Engenharia Didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis.	Dissertação	Francirley Moura Porto	2019
21	A elaboração e construção de material pedagógico como metodologia do processo ensino aprendizagem de frações e produtos notáveis.	Dissertação	Glauce Ribeiro de Souza Mendonça	2019

22	O jogo Duotri: uma possibilidade à compreensão dos números fracionários.	Dissertação	Kennedy Almeida Sampaio Vieira	2019
23	Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura.	Dissertação	José Carlos Medeiros dos Santos	2019

Fonte: Elaborada pela autora.

Além das dissertações listadas acima, utilizamos outros recursos que subsidiaram a elaboração da seqüência, são eles:

Livros didáticos:

- RIO DE JANEIRO, Prefeitura Municipal do. Secretaria da Educação. **Material didático carioca – 6º ano – 1º semestre.** Rio de Janeiro, 2020.
- RIO DE JANEIRO, Prefeitura Municipal do. Secretaria da Educação. **Material didático carioca – 6º ano – 2º semestre.** Rio de Janeiro, 2020.
- OLIVEIRA, Carlos N. C. **Geração alpha Matemática: ensino fundamental - anos finais, 6º ano.** Org, SM Educação. 2º ed. São Paulo, 2019.
- ANDRINI, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria J. **Praticando Matemática, 6.** 3º edição, renovada. Editora do Brasil. São Paulo, 2012.

Portais de Matemática:

- Khan Academy. Khan Academy, 2008. Página Inicial. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/>>. Acesso em: 01 de Set. 2020

Outros referenciais:

- PARANÁ, Governo do Estado do. Secretaria de Estado da Educação – Departamento de Educação Básica. **Caderno de atividades – Matemática – Anos iniciais do Ensino Fundamental**. Paraná, 2009.
- PARANÁ, Governo do Estado do. Secretaria de Estado da Educação – Departamento de Educação Básica. **Caderno de atividades – Matemática – Anos finais do Ensino Fundamental**. Paraná, 2009.
- BREITENBACH, Helena M. **Ensino de frações via concepções parte/todo, quociente e medida**. Monografia (Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, Brasil, 2010.
- DUFFECK, Adilene P. L. **Cozinhando e calculando: uma estratégia para ensinar matemática com uso de receitas culinárias**. Projeto de pesquisa (Programa de desenvolvimento Educacional). Secretária de Estado da Educação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Colombo, Brasil, 2014.

Para ter os entendimentos necessários sobre os aspectos mencionados anteriormente, a escolha desta estratégia requereu de muita leitura e análise dos materiais. Acreditamos que por ter visões diferentes, esses referenciais só agregaram no trabalho e permitiram pensar diferentes formas e entendimentos sobre o mesmo assunto, acrescentando na construção desta pesquisa.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Os números fracionários nem sempre foram escritos e pensados da mesma forma. Eles passaram por diversas mudanças, até chegarem aos números que conhecemos hoje. Por esse motivo, Lima (2014) acredita que o número fracionário permite melhores entendimentos sobre o conceito como: razão, porcentagem, proporções e medidas. Justamente alguns dos significados que são atrelados ao conceito de fração, indo ao encontro da nossa pesquisa.

No decorrer da história, podemos observar que, assim como outros conceitos matemáticos, a fração foi sendo necessária para medir ou comparar grandezas. Como explicam Campos e Rodrigues (2007), as habilidades que os homens tinham em contar não se fizeram suficientes, a ponto de que não conseguiram verificar quantas vezes uma grandeza era maior que a outra.

O número fracionário teve uma evolução histórica, atravessando a “Idade da Pedra, às civilizações da antiguidade, egípcios, gregos, árabes hindus, babilônicos” (LIMA 2014, p. 20), até chegar ao formato que conhecemos atualmente. Ao longo dos tempo as frações tiveram diversas aplicações que foram utilizadas por esses povos.

Existem alguns filósofos que também contribuíram com a evolução do número fracionário como conhecemos nos dias atuais. Lima (2014, p.22) relata alguns deles em sua obra, destacando as ideias trazidas por Boyer (1974):

Pensadores como Fibonacci (nascido por volta de 1175, introduziu o conceito dos números de Fibonacci), Leopold Kronecker (nascido na Alemanha em 1823, desenvolveu estudos importantes sobre a Álgebra e as frações), Simón Stevin (nasceu em 1548 em Bruges, na Bélgica, desenvolveu estudos sobre o algebrismo e o uso do sistema decimal de frações), entre outros, desenvolveram conceitos, experimentos e aplicações a partir do final da Idade Média, que embasam a forma representativa de frações que conhecemos hoje.

Reverendo o passado, visitando a história das frações, é possível perceber o quão importante é entender como foi o processo de desenvolvimento do número fracionário. E, o quanto ele foi necessário para ajudar em atividades do cotidiano dessas pessoas, as quais pensaram nas frações como uma maneira de auxiliá-las e, também, como a Matemática evoluiu até chegarmos aos dias atuais. Entender a história das frações é também compreender como esse número pode ser ensinado, visto que ele passou por muitas etapas até chegar à representação que temos hoje. O que nos permite pensar e desenvolver melhor todas as atividades que serão propostas, a partir de uma Sequência Didática.

3.2 OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Quando nos referimos ao ensino das frações, podemos considerar os diferentes significados que podem ser atribuídos e discutidos. Silva (2005), Campos e Rodri-

gues (2007) e Magina, Bezerra e Spinillo (2009) dizem que há cinco significados que podem ser atribuídos ao conceito de frações, sendo eles: parte-todo, quociente, razão, medida e operador.

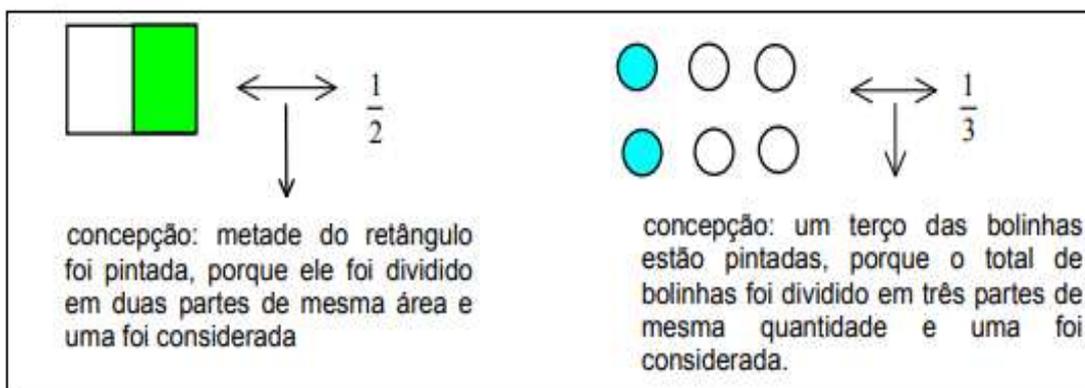
3.2.1 PARTE TODO

Esse significado é o mais utilizado em livros didáticos e pelos professores. A partir do que dizem Magina, Bezerra e Spinillo (2009, p. 414) “esse modo de ensinar ignora outras formas possíveis de representar a fração e a variedade de significados a ela associados, restringindo-se às relações parte-todo.”.

Para compreender esse modo de ensinar, nos remetemos à figuras/desenhos que indicam o todo ou também chamado de inteiro, o qual deve ser dividido em partes iguais, ou seja, do mesmo tamanho. Na escrita matemática, o todo será representado pela letra b , neste caso, e será o nosso denominador (parte debaixo da fração) $\frac{a}{b}$, que se refere à quantidade de partes que o inteiro foi dividido.

Quando fazemos a ação de pintar as partes divididas, teremos parte do todo e ela será representada pela letra a , denominada numerador (parte de cima da fração) $\frac{a}{b}$. O numerador refere-se à quantidade de partes que estamos considerando do inteiro. Podemos visualizar essas descrições a partir da representação feita por Silva (2005), (Figura 1).

FIGURA 1: Representação geométrica e simbólica em relação ao significado parte-todo



FONTE: Retirado de SILVA (2005, p.106)

3.2.2 MEDIDA

De acordo com Silva (2005), essa concepção pode auxiliar no ensino dos números, para que os alunos percebam que é preciso outros tipos de quantificações, além dos números naturais. Desse modo, essas compreensões contribuem na necessidade de percepção de um novo número que é capaz de medir comprimentos que não são inteiros.

Explicando melhor essa concepção, Silva (2005) divide o processo em quatro partes, as quais explicam algumas maneiras de entender o número fracionário: 1) determinar medidas de comprimento de um objeto; 2) determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais; 3) determinar medidas em segmentos não divididos em partes da mesma medida; e 4) reconstituição da unidade.

A primeira parte pede para que se utilizem diferentes materiais (como régua, tiras de papéis ou até as mãos) com a intenção de medir um comprimento qualquer. Nesse momento, quando algo for medido, é possível perceber que os materiais que foram utilizados nessas medições, precisarão ser divididos. A partir desse entendimento, conseguimos ter a noção de que o inteiro já não supre mais essa necessidade e, então, será preciso outro método que dê conta de medir esses comprimentos.

Na segunda parte, teremos uma medida que terá início e fim e será dividida em partes iguais. Aqui, podemos então denominar cada parte da medida e contar quantas partes até onde estiver marcado. Ou seja, se juntarmos todas as partes da

figura, ficamos com n partes, se a figura foi dividida em 5 partes iguais, temos $n = 5$, podendo escrever a fração. Esta maneira está associada à concepção parte-todo.

Na terceira parte, as medidas não estavam divididas igualmente, por isso antes de seguir os passos da parte dois, teremos de dividir corretamente a medida. Desse modo, poderá ser feito o mesmo processo da segunda parte.

Por fim, na quarta parte, a medida não estava dividida, mas representada por uma fração. Em vista disso, devemos entender em quantas partes foram divididas essa medida e organizá-la de maneira que isso fique perceptível.

3.2.3 QUOCIENTE

Essa concepção refere-se ao número fracionário como divisão. Para Onuchic e Allevalo (2008, p.88), o significado de quociente é percebido quando “um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos.”.

Essa concepção sobre os números fracionários em relação ao quociente, é muito bem colocada por Silva (2005, p.121):

As tarefas que solicitam a mobilização da concepção de quocientes para números fracionários estão, geralmente, associadas a distribuições de grandezas. O ostensivo $\frac{a}{b}$ que representa o resultado de uma distribuição significa que a foi distribuído em b partes, ou seja, a foi dividido em um número b de partes iguais. Diferentes dos tipos de tarefas que associam as concepções tratadas anteriormente, nestas o a pode ser menor, maior ou igual a b e podem representar objetivos diferentes como, por exemplo, “crianças” e “chocolates”.

Essa tarefa pode ser associada aos números fracionários, pois ela consiste em dividir partes em um todo, fazendo com que se relacione a representação de número fracionário $\frac{a}{b}$.

3.2.4 RAZÃO

Aqui a concepção de razão, traz a ideia de comparação entre medidas de duas grandezas, fazendo com que a ideia de fração envolve a equivalência de números fracionários. Afim de exemplificar melhor essa explicação, Silva (2005) divide

essa concepção em três partes: 1) determinar uma razão; 2) determinar valor desconhecido; e 3) comparar razões.

A primeira parte consiste em comparar grandezas, (Figura 2). Nesta atividade, que é proposta pela autora, podemos perceber a ampliação da placa, na qual se refere a uma razão da placa A para a placa B. Ou uma redução, caso seja a razão entre a placa B e a placa A.

FIGURA 2: Tarefa sobre fração em relação ao significado de razão.



FONTE: Retirado de SILVA (2005, p.125)

A segunda parte consiste em determinar um valor desconhecido, do qual não é necessário tentar fazer a fração simbólica, mas perceber que é preciso comparar as grandezas, o que irá implicar na descoberta de outros valores.

A terceira parte, tem o objetivo de comparar duas razões e concluir a pergunta que se faz, porém é preciso perceber que são relações de frações equivalentes de mesmo denominador. As frações, a partir dessa concepção também podem ser descritas na forma $a: b$.

3.2.5 OPERADOR

Esse significado pode ser explicado a partir do que foi dito por Lima (2014, p. 24), "... o significado de operador multiplicativo atua como fator transformador de um número ao ser multiplicado por a , e logo em seguida, dividido por b ".

Pode ser exemplificado por uma das tarefas de Silva (2005), (figura 3).

FIGURA 3: Tarefa sobre frações em relação ao significado de operador

Tarefa 1: Construir um quadrado cujo lado tenha $\frac{2}{3}$ da medida do lado do quadrado dado.

FONTE: Retirado de SILVA (2005, p. 134)

Esta tarefa sobre operador multiplicativo deve ser entendida como um número fracionário agindo sobre uma grandeza, ou seja, sobre a medida de um quadro. Se este quadrado tiver a medida do lado, por exemplo, 3cm , devemos perceber que os $\frac{2}{3}$ irá agir sobre a medida do lado de 3cm , de forma que o lado do novo quadrado deverá medir $\frac{2}{3}$ dos 3cm .

Tendo em vista a história das frações e os significados que podem ser atribuídos a elas, percebemos o quão importante é entender como foi esse processo. O conceito de frações passou por muitas etapas até chegar ao que conhecemos hoje, por este motivo os significados são tão importantes para o ensino das frações. Através da história, observamos que um conceito não é definido de uma hora pra outra e que ele pode ter mais representações, como é o caso da fração. Essa é uma maneira de enxergar o número fracionário e entendê-lo de modo que esses significados não fiquem desconectados uns dos outros, fazendo com que o conceito de frações seja único ou que crie barreiras para aprendê-lo.

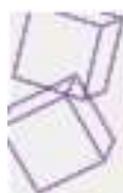
3.3 FRAÇÕES NA BNCC

Com o intuito de compreender o que tem sido base no ensino das frações, visitamos os documentos que norteiam o Ensino Básico, neste caso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Este é o documento legal que diz o que se deve ensinar nas instituições de ensino no país. Ela foi implementada no final do ano de 2017, com homologação dos Anos Iniciais e Ensino Fundamental. Já a BNCC do Ensino Médio foi homologada quase um ano depois, no final de 2018. Com todas as etapas homologadas, o Brasil passou a ter uma Base com as aprendizagens previstas à Educação Básica. (BRASIL, 2017)

A BNCC estabelece conhecimentos, competências e habilidades em prol do desenvolvimento dos estudantes durante a sua vida escolar. A Base é dividida em competências gerais, competências específicas e habilidades. As competências gerais são aquelas que os alunos devem desenvolver durante a Educação Básica. As competências específicas são as que devem ser desenvolvidas nas áreas de conhecimentos específicos, neste caso, a Área da Matemática. E, por último, as habilidades são relativas aos conteúdos e conceitos aprendidos em cada etapa da Educação Básica. (BRASIL, 2017)

Enfatizando na área da Matemática, a BNCC estabelece competências específicas para esta área no Ensino Fundamental, ou seja, tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do Ensino Fundamental, (figura 4).

FIGURA 4: Competências específicas da área da Matemática no Ensino Fundamental.



COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva; que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais; de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Para construir e montar uma Sequência Didática sobre os significados das frações, pensamos primeiramente em ver nos documentos que norteiam a Educação Básica o que se era dito sobre este conteúdo. Precisamos entender como que foi pensado e quando esse assunto deve ser inserido em aula, segundo os documentos legais brasileiros. Por isso, compreender que existem algumas ideias sobre o conceito, ou simples representações sobre as frações em anos anteriores ao sexto ano do Ensino Fundamental é importante no entendimento de quais conhecimentos os alunos já tiveram acesso, tendo em vista que já trarão uma bagagem e um entendimento sobre este assunto. Portanto, ver o que é dito no documento legal, ou seja, na BNCC, traz elementos importantes para podermos refletir sobre o que foi construído na Sequência Didática.

A BNCC faz referência ao número fracionário a partir do 4º Ano do Ensino Fundamental, com ideias de frações mais básicas. As habilidades que devem ser desenvolvidas nesta etapa, conforme a BNCC (2017, p.290), são:

- **(EF04MA09) Reconhecer** as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como **unidades de medida** menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
- **(EF04MA10) Reconhecer** que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a **representação decimal** de um número racional e **relacionar décimos e centésimos** com a representação do sistema monetário brasileiro (BRASIL, 2017, p.291).

As frações também são vistas no 5º ano, contudo, neste ano, espera-se que os alunos consigam identificar, representar, relacionar números fracionários com números decimais e associar à porcentagem, estabelecendo as seguintes habilidades (Ibid., p. 294-295):

- **(EF05MA03) Identificar** e **representar** frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma **divisão** ou à ideia de **parte de um todo**, utilizando a reta numérica como recurso.
- **(EF05MA04) Identificar** frações equivalentes.
- **(EF05MA05) Comparar** e **ordenar** números **racionais positivos** (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
- **(EF05MA06) Associar as representações** 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à **décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro**, para calcular **porcentagens**, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 294-295).

Os objetos de conhecimento que fazem referência aos números fracionários no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental são as noções de escrita, reconhecimento, leitura e representações na reta numérica. Já no 6º ano, os objetos do conhecimento começam a ficar mais específicos, tais como, comparar e compreender o que são as frações em alguns dos seus significados.

A partir do 6º ano do Ensino Fundamental é onde a BNCC diz que temos significados diferentes associados ao conceito de frações, como parte-todo e quociente. Contudo, é perceptível que a base traz referências associadas também à porcentagem. A partir desses objetos do conhecimento é que podemos perceber diferentes representações e significados dados ao número fracionário. E é a partir deste ano que se iniciam os cálculos de adição e subtração com este número. A própria Base faz referência a dois diferentes significados, que são atribuídos a esse conteúdo, trazendo então uma possibilidade de discussões acerca dos diferentes significados atribuídos às frações. As habilidades que devem ser desenvolvidas segundo a BNCC (2017, p.300) são:

- **(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações** associadas às ideias de **partes de inteiros e resultado de divisão**, identificando frações equivalentes.
- **(EF06MA08) Reconhecer** que os **números racionais positivos** podem ser expressos nas formas **fracionária e decimal**, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
- **(EF06MA09) Resolver e elaborar** problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
- **(EF06MA10) Resolver e elaborar** problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária (BRASIL, 2017, p. 301, grifo nosso).

Com base no que diz a BNCC, propomos que a Sequência Didática seja feita com os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, pois é o momento em que se conceitua a fração. Pensando em trazer os outros significados, acreditamos que se forem trabalhados juntos, no momento em que iremos definir as frações, o entendimento que os alunos terão será melhor do que fazendo-os separadamente.

3.4 DIFICULDADES NO ENSINO DE FRAÇÕES

As frações vêm sendo um grande desafio tanto para os alunos quanto para os professores (NUNES, 2003). Por isso, pensar em como ensiná-las é desafiador para o professor de Matemática. Pensando nos aprofundamentos que esta pesquisa nos proporciona e também com a intenção de auxiliar os futuros professores ou professoras quanto ao ensino de frações, iremos fazer uma breve discussão sobre algumas dificuldades/barreiras que possam surgir quando estamos falando sobre os números fracionários.

Geralmente, quando vamos ensinar ou aprender sobre as frações, começamos com o significado de parte-todo. Iniciando a discussão sobre as barreiras no ensino de frações, trago um trecho de Oliveira (1996, p.46) que faz um resumo dos obstáculos que podem ser encontrados no ensino e na aprendizagem das frações, sendo eles:

(...) dificuldades para **localizar frações na reta numérica**; dificuldades no trabalho com **números mistos e frações equivalentes** nas operações com frações; dificuldades em **entender o conceito de uma fração** mesmo possuindo habilidades computacionais, isto é, o que existe é um conhecimento instrumental das frações, mas não o conhecimento das relações subjacentes às mesmas; dificuldades para ver as **várias interpretações do conceito como tópicos relacionados**; uso predominante de **estratégias e propriedades dos números naturais quanto à ordem das frações** e também a razão e proporção; interferência de habilidades pertencentes ao contexto contínuo no contexto discreto; dificuldades em **representar frações de forma simbólica**, isto é, em modelos físicos ou diagramas, devido ao uso **excessivo de figuras pré-divididas**; busca de um raciocínio mecânico (regras e truques) no trabalho com frações.

O autor faz referência a um apanhado de dificuldades que podem ser encontradas, quando se ensina frações. Deste modo, iremos discutir sobre eles com o intuito de auxiliar no desenvolvimento da Sequência Didática. Essas discussões nos auxiliaram tanto na questão dos significados que são atribuídos às frações, quanto nas atividades que foram propostas em cada parte da Sequência.

Quando falamos em frações, uma das primeiras dificuldades que surgem são as representações. Elas aparecem, pois estamos acostumados a enxergar o número natural e compará-los, como por exemplo, $2 < 3$. Sabemos que o número dois é menor que o três. Quando chegamos a frações, o número muda de representação, e

agora temos representações como: $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, o que acaba criando certo conflito, pois estávamos acostumados com a representação de tamanho ($8765 > 5$) e isso não acontece com os números racionais $2,3 > 2,13456$. (PATRONO, 2011).

Por este motivo, trago um trecho de Megina, Bezerra e Spinilo (2009), que relata sobre os diferentes significados que podem ser associados ao conceito de fração, os quais podem auxiliar na noção e compreensão deste número.

Os autores (2009, p.414) apontam que o ensino das frações parece

(...) iniciar-se por explicações acerca das relações entre uma quantidade representada por diagramas ou desenhos, e passa, em seguida, a adotar, quase que exclusivamente, a representação simbólica formal associada a situações que requerem resoluções algorítmicas. Esse modo de ensinar ignora outras formas possíveis de representar a fração e a variedade de significados a ela associados, restringindo-se às relações parte-todo. A fração é considerada de forma isolada, sem que sejam feitas as conexões com outros conceitos (divisão, porcentagem, probabilidade, razão, proporção) e noções relevantes para sua compreensão (equivalência, parte-todo).

Com esse excerto é possível identificar que, geralmente, são utilizados apenas um significado para o ensino das frações, que é o parte-todo. Quase sempre, quando se apresentam as frações, elas são introduzidas da mesma forma. Magina, Bezerra e Spinilo (2009) trazem um ponto que é muito importante, a relação desconectada com os outros significados, os quais podem estar associados às frações. Em razão disto, acreditamos ser importante discutir esses significados em sala de aula, com o intuito de que o ensino das frações e os entendimentos acerca desses significados contribuam e auxiliem no aprendizado dos alunos.

Outra dificuldade retratada por Olivera (1966), quando estamos falando das frações, é a localização na reta numérica. Por exemplo, para que os alunos consigam encontrar o número $\frac{1}{2}$ na reta numérica, eles precisam fazer a conversão desse número em números decimais, na intenção de que fique mais clara a visualização do número na reta, pois fazendo $1 \div 2 = 0,5$, fica evidente onde está localizado este número.

É possível perceber que existem alguns impasses, quando estamos falando sobre o ensino de frações, como mostram os autores citados acima. As relutâncias que surgem ao ver a fração como um número, por exemplo, pode desencadear pro-

blemas ao operá-lo. Por este motivo, e por todas as dificuldades que foram citadas acima é importante, que, ao ler e entender essas dificuldades, elas auxiliem na elaboração das atividades que foram feitas neste trabalho. Desta forma, podemos pensar em estratégias de ensino, com diferentes recursos, suprimindo as possíveis necessidades que apareçam.

Queremos mostrar que as frações têm um grande campo a ser explorado e queremos que isso seja possível dentro da sala de aula. O objetivo não é fazer com que os alunos saibam exatamente a classificação dos cinco significados que estamos abrangendo, mas, sim, que possam ter ideias de como eles são trabalhados, para, quando precisarem utilizá-las, isso não seja uma grande dificuldade. Com a intenção de explicar o que queremos dizer, trazemos um trecho de Mamede (2011, p. 3).

Do ponto de vista da sala de aula, não interessa tanto distinguir esta ou aquela classificação. Interessa sim garantir que qualquer que seja a classificação seguida, são proporcionadas aos alunos oportunidades para explorar frações em todas as suas vertentes. Neste ponto os investigadores são unânimes, o conceito de frações só está totalmente adquirido quando o aluno domina o conceito em todas as interpretações ou significados de fração, e é capaz de traduzir, raciocinar e resolver problemas nas diferentes interpretações.

Como citou o autor do texto, o que estamos interessados é que o aluno tenha oportunidades de explorar os cinco significados discutidos no decorrer desta pesquisa. E o que queremos, a partir da Sequência Didática, é possibilitar esse contato com os significados, com o intuito de que o estudante seja capaz de reconhecer e resolver problemas, por meio destes.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

No decorrer deste trabalho discutimos sobre o ensino de frações e os diferentes significados que podem ser atribuídos ao seu conceito. Pensando em uma forma de como pode ser ensinado o conceito de frações, nesta sessão iremos apresentar uma Sequência Didática que procura apontar caminhos possíveis no sentido de viabilizar condições para o alcance desse objetivo.

No desenvolvimento da Sequência Didática, iremos seguir os passos de Carvalho (2017), sendo eles: escolha do tema a ser trabalhado; questionamentos a escolha do tema; planejamento dos conteúdos; objetivos a serem atingidos nos processos de ensino e aprendizagem; delimitação da sequência de atividades, levando em consideração a organização dos estudantes, o material didático, cronograma, integração entre cada atividade, etapas e avaliação dos resultados.

Esses passos deram subsídios na elaboração da referida sequência. Refletindo nas discussões feitas sobre o ensino de frações anteriormente, propomos que as atividades da sequência sejam feitas com os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Todas as atividades propostas nesta Sequência Didática estão descritas e justificadas com os elementos que foram trazidos ao longo deste trabalho. As descrições e justificativas podem auxiliar pesquisadores, licenciandos, professores e demais profissionais da educação, no entendimento das atividades e podem prever possíveis dificuldades ou dúvidas que vão surgindo, no decorrer dessa prática.

A sequência foi dividida em três partes, de modo que a compreensão dos cinco significados seja viável. Por esta razão, não queremos apenas que os alunos entendam os significados separadamente, mas sim que possam explorá-los em todas as suas classificações, com o propósito de compreender o conceito de frações (Mamede 2011). Então, estruturamos a sequência em três etapas: a etapa da sondagem, onde propomos questionamentos para entender o que os alunos já sabem ou ideias que eles têm sobre as frações.

Na segunda etapa, indicamos atividades que possam dar conta de mostrar os cinco significados, que foram discutidos no capítulo 3.1. Todas as atividades sugerir-

das foram pensadas a fim de estabelecer compreensões dos alunos sobre cada significado separadamente, mas também fazer associações entre todos eles, visto que não são significados desconectados, mas sim que contribuem para elaborar o conceito de frações. Contudo, é importante destacar que as compreensões elaboradas pelos alunos são produzidas a partir dos significados que cada sujeito traz consigo. Pode ser que nem todos os significados sejam compreendidos da mesma maneira por todos, tendo em vista os aspectos da cultura e da linguagem implicados nesta conceituação.

A avaliação é a última etapa da Sequência Didática, na qual sugerimos atividades que avaliem as aprendizagens dos alunos quanto aos cinco significados associados ao conceito de fração. Essa etapa será aplicada ao final da Sequência Didática. A avaliação será o momento de pensar sobre as atividades feitas e avaliar se o ensino e a aprendizagem foram suficientes para dar conta dos objetivos propostos.

Abaixo apresentaremos as três etapas. Em cada uma delas, teremos: os conteúdos trabalhados, os objetivos, o número de questões e a previsão de tempo aproximado para o desenvolvimento de cada uma delas. Na etapa 2, teremos divisões dos significados, portanto, cada significado contará com uma ou duas atividades. No geral, todas as atividades têm descrições, possibilitando o entendimento, compreensão das dificuldades, o que está sendo pedido e o intuito de cada uma das questões propostas, com a finalidade de auxiliar na compreensão da Sequência Didática que está sendo proposta.

4.1 ETAPA 1 - SONDAGEM

Conteúdos:

- Números racionais: frações unitárias
- Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica
- Cálculo de porcentagens e representação fracionária

Competências e habilidades:

4º ano do Ensino Fundamental

- **(EF04MA09) Reconhecer** as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como **unidades de medida** menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.

5º ano do Ensino Fundamental

- **(EF05MA03) Identificar e representar** frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma **divisão** ou à ideia de **parte de um todo**, utilizando a reta numérica como recurso.
- **(EF05MA04) Identificar** frações equivalentes.
- **(EF05MA05) Comparar e ordenar** números **racionais positivos** (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
- **(EF05MA06) Associar as representações** 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à **décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro**, para calcular **porcentagens**, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p.491 e 495).

Número de questões: 6 questões

Duração: 1 aula de 50 minutos

A etapa da sondagem conta apenas com uma atividade, a qual tem seis questões, com a finalidade de compreender e rever o que os alunos já têm de entendimento sobre este assunto. Essa etapa não tem somente atividades sobre os significados relacionados ao conceito de frações, pois o conceito em si não é desenvolvido antes do sexto ano e, de acordo com a BNCC (2017), apenas algumas noções sobre representação, associações e identificações são vistas no quarto e quinto anos do Ensino Fundamental. Essa atividade está prevista para ser realizada em uma aula de aproximadamente 50 minutos.

A partir destas informações, escolhemos seis questões que englobam essas competências e habilidades. A questão 1 se refere à definição de fração; as questões 2, 3 e 4 tratam das representações sobre frações; a questão 5 se refere à localização na reta numérica; e a última questão, 6, se refere à leitura e escrita das frações e traz, também, representações utilizando números como os decimais.

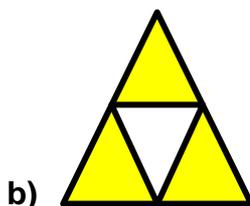
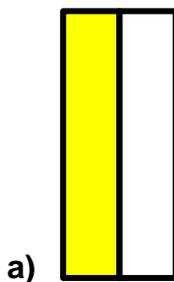
ATIVIDADE 1

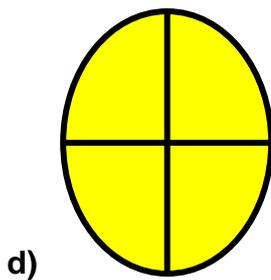
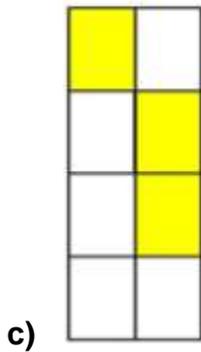
1) O que é fração?

Iniciamos a sondagem com a questão 1 perguntando o que são as frações. Nesse questionamento, pretendemos instigar o aluno a pensar o que é uma fração e/ou onde existem as frações. Essa questão serve para compreender as concepções e a gramática que os alunos trazem e associam às frações.

2) (BREITENBACH, 2010) Identifique as frações associadas a parte colorida de cada figura abaixo:

Figura 5: Desenhos geométricos para representar o significado de parte-todo





Fonte: elaborado pela autora.

RESPOSTA:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{8}$

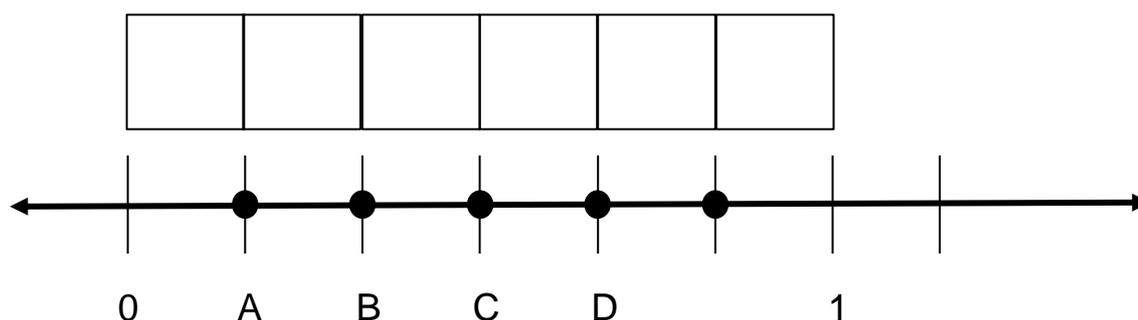
d) $\frac{4}{4}$ ou 1

Na questão dois entramos no conceito parte-todo, visto que se trata de figuras divididas e pintadas de forma igual. O significado de parte-todo é o que mais aparece nos livros didáticos e na sala de aula, quando nos referimos ao conceito de fração. Ele é muito importante para que os alunos entendam que as frações fazem parte de um todo. Contudo, não podemos ficar presos a esse significado, visto que todos os outros compõem o conceito de frações. Essa questão tem como objetivo interpretar se os alunos conseguem nomear as frações a partir de desenhos ou figuras.

É relevante salientar que figuras e formas geométricas diferentes auxiliam os alunos a perceberem que a fração não precisa, necessariamente, ser só um quadrado ou retângulo. Muitas vezes, utilizamos apenas desenhos como quadrados e retângulos na representação do todo, porém o todo pode ser representado por outras formas geométricas ou desenhos. É necessário que os alunos compreendam que eles precisam ser divididos igualmente, para representar um número fracionário. A letra d) da questão é especial, porque nela estão todas as partes pintadas. A proposta aqui é perceber se os alunos compreendem que a fração descrita pode ser $\frac{4}{4}$ ou que se dividirmos o numerador com o denominador temos o número 1, como sendo um inteiro, ou seja, o círculo todo.

3) (KHAN ACADEMY, 2008) Qual ponto está $\frac{2}{6}$ na reta numérica? (figura 6)

FIGURA 6: Reta numérica dividida em 6 partes.



Fonte: elaborado pela autora.

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D

Khan Academy, acessado em 06.04.2021. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic/arith-review-fractions-on-the-number-line/e/relate-number-lines-to-fraction-bars?modal=1&ref=resume_learning

RESPOSTA:

Letra b), ou seja, ponto B localizado na reta numérica.

A reta numérica propõe aos alunos a visualização das frações junto aos números naturais. Isso quer dizer que quando pensamos em qual local da reta numérica está, como o exemplo da questão 3, que pede para dizer em qual ponto da reta numérica está o número $\frac{2}{6}$. Geralmente, o que poderia ser feito é dividir a fração afim de encontrar o número decimal e, a partir desse, encontrar o ponto na reta numérica. Com essa questão, queremos entender se os alunos conseguem fazer associações com o número de divisões que temos na reta numérica a partir do seu tamanho, podendo localizar a fração $\frac{2}{6}$ sem que precise dividi-la e transformá-la em números decimais. Ou seja, o aluno pode encontrar o número na reta que vai de 0 a 1, dividindo aquele espaço em seis partes iguais e contar duas dessas partes da reta, para representar os $\frac{2}{6}$. Esse pensamento auxilia a não identificar sempre as frações como números decimais e sim pelo seu tamanho.

4) (DUFFECK, 2014) Leia a receita abaixo e, em seguida, responda as questões:

Ingredientes:

- 1/3 de xícara (chá) de manteiga em temperatura ambiente
- ¾ de xícara (chá) de creme de leite
- 1 ovo
- ½ de xícara (chá) de açúcar
- ¾ de xícara (chá) de farinha de trigo
- ½ de xícara (chá) de chocolate branco em gotas
- 1 colher (sopa) rasa de fermento em pó
- 9 forminhas de papel para muffins
- Confeitos para decorar, a gosto.

Modo de preparo:

Bata a manteiga com creme de leite e o ovo. Junte o açúcar, a farinha de trigo e bata em velocidade média por mais alguns minutos até obter uma mistura homogênea. Desligue a batedeira e adicione as gotas de chocolate, o fermento em pó e misture com o auxílio de uma colher. Para distribuir a mistura nas forminhas, utilize como medida uma colher de sorvete (uma conchinha em cada forminha). Leve ao forno pré-aquecido por 5 minutos, em uma temperatura de 180° , por 10 minutos.

Tempo de preparo: 20 minutos

Rendimento: 9 muffins

a) Qual a leitura de cada uma das frações que aparecem na receita? _____

b) Na culinária podemos utilizar vários instrumentos para medir. Qual instrumento de medida está associado às frações nessa receita? _____

c) Em uma festa, para 45 convidados, quantas receitas de muffins precisam ser feitas, de forma que cada convidado possa saborear pelo menos um muffin?

d) Reveja a quantidade de ingredientes da receita, para que possam ser feitos os 45 muffins para a festa? Reescreva a receita com as quantidades de ingredientes adequadas. _____

RESPOSTA:

a) Um terço; três quartos; um meio.

b) Xícara

c) 5 receitas

d) Ingredientes:

- $1 \frac{2}{3}$ de xícara (chá) de manteiga em temperatura ambiente;
- $3 \frac{3}{4}$ de xícara (chá) de creme de leite;
- 5 ovos;
- $2 \frac{1}{2}$ de xícara (chá) de açúcar ;
- $3 \frac{3}{4}$ de xícara (chá) de farinha de trigo;
- $2 \frac{1}{2}$ de xícara (chá) de chocolate branco em gotas;
- 5 colher (sopa) rasa de fermento em pó;
- 45 forminhas de papel para muffins.

A questão quatro contempla a leitura e escrita de frações; associações de medidas com o número fracionário; operações de frações com medidas que utilizamos no cotidiano. Estamos utilizando uma receita de muffins na intenção de fazer questionamentos sobre as frações. As questões solicitadas, após os ingredientes e o modo de preparo dessa receita, são para que os alunos possam perceber que as frações estão no nosso cotidiano e que elas podem ser utilizadas em vários lugares. Ademais, o objetivo é observar se os alunos conseguem ler e escrever as frações mostradas na receita; e entender se eles percebem que estamos utilizando diferentes medições. Como, por exemplo, a xícara, que é um instrumento de medida utilizado em diversas receitas e nesse caso está sendo representada como o inteiro utilizado para medir os ingredientes. Além disso, observar se os alunos entendem que

a xícara é uma medida e diferenciam as frações como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ da xícara. São observações importantes que podem trazer percepções do entendimento dos alunos quanto a essas distinções de um mesmo instrumento de medida, que é a xícara.

As letras c) e d) pedem para que os alunos façam 45 muffins e, afim de realizar essas atividades, eles precisarão duplicar ou triplicar a receita. Esse é o objetivo, fazer com que eles possam operar com as frações, sem ter que fazer algoritmos. E que possam utilizar de outros raciocínios para realizar a atividade. Com essas questões, além de observar o que destacamos acima, podemos também entender quais as noções que os alunos têm sobre frações na concepção de inteiros. Pois, quando operamos as frações, elas podem vir a ser números inteiros. Então, também, podemos compreender quais as noções que os alunos têm sobre as frações como parte-todo.

- 5) (PARANÁ, 2009) Claudina saiu com uma amiga e resolveram comer uma pizza, que foi dividida em oito pedaços. Cada uma comeu dois pedaços. A porcentagem de pizza (Figura 7) comida por cada uma foi de:
- a) 25%
 - b) 50%
 - c) 60%
 - d) 75%

FIGURA 7: Pizza dividida em oito pedaços.



FONTE: Google imagens, 2021.

RESPOSTA:

Letra a), ou seja, cada uma comeu 25% da pizza.

A questão cinco também se refere a representações, só que, neste caso, associando-se as porcentagens. Entender que as frações também estão associadas as porcentagens é importante para que o aluno consiga perceber que existe mais de uma representação para uma mesma quantidade. Como podemos representar a quantidade de fatias comidas em forma de fração, elas também podem ser escritas em porcentagens e estão se referindo a uma mesma quantidade, ou seja, a de pizzas que cada pessoa comeu. Essas associações permitem ao aluno entender que é possível operar com números fracionários ou com fração em seu dia a dia, para fazer, por exemplo, fazer divisões de comida.

6) (CARVALHO, 2017) Utilizando os símbolos $>$ (maior), $<$ (menor) ou $=$ (igual), compare as frações entre si e explique como fez esse processo.

a) $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{12}$ $\frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{8}$ $\frac{4}{16}$

RESPOSTA:

a) $\frac{1}{5} < \frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{5} > \frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{12} < \frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$

Na questão seis queremos identificar se o aluno consegue comparar as frações. Essa questão pode ser resolvida de algumas maneiras, uma delas pode ser a divisão do numerador pelo denominador para ver, em número decimal, qual é maior ou menor ou igual à outra fração. Desse modo, queremos perceber se o aluno faz associações com os números decimais ou se ele entende as frações como tamanhos, relacionando-os como sendo o tamanho dos denominadores.

4.2 ETAPA 2 - CONCEITO DE FRAÇÕES E SEUS SIGNIFICADOS

Conteúdos: Frações em seus diferentes significados: parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Objetivos gerais:

- Perceber o significado de fração em relação à **parte-todo razão, operador, medida e quociente**.
- Comparar as frações em relação aos cinco significados.
- Compreender que os números fracionários também podem ser escritos de formas diferentes, como: escala e número decimal
- Resolver problemas envolvendo os cinco significados atrelados ao conceito de frações.
- Identificar os significados separadamente.
- Entender as relações entre os significados com as frações.

Número de atividades: 7 atividades

Duração: 4 aulas de 50 minutos cada

A etapa número dois foi pensada de acordo com a Sequência Didática proposta por Carvalho (2017). Primeiramente, a turma será dividida em cinco grupos. Cada grupo ficará responsável por um significado que está associado ao conceito de fração. Ou seja, os significados de parte-todo, medida, operador, quociente e razão.

A partir dessa divisão, cada um dos grupos receberá atividades que possam instigá-los a pensar sobre os significados.

Ao terminar as atividades propostas, os alunos deverão trocar as tarefas entre os grupos. Com essas trocas, todos terão a oportunidade de realizar e pensar sobre os significados, ou seja, todos os alunos irão realizar as tarefas sobre os cinco significados. O que chamaremos de circuito.

Após o término do circuito, pensamos em uma socialização com a turma toda. Nesta parte da proposta, sugerimos que o professor possa fazer um momento de reflexão sobre as atividades. Este momento será de fala entre os alunos e o professor, para que expressem o que pensaram e como realizaram cada atividade. A partir dessas falas, o professor pode ir agregando comentários e características afim de complementar a explicação de cada significado. É importante a realização de resumos, relatórios e explicações escritas, com a intenção de ter tudo registrado em seus cadernos, para consulta e estudos posteriores às atividades.

A duração desta etapa está prevista em quatro períodos de cinquenta minutos cada, para a realização das atividades e dois períodos de cinquenta minutos cada, para a realização da socialização com a turma. Abaixo temos um esquema (figura 8) que mostra como serão divididos os significados e atividades entre os cinco grupos. Essa pode ser uma possibilidade de disposição das atividades para começar o circuito. Quando as atividades forem trocadas, podemos distribuir a **Atividade 1** para o **grupo 2**, a **Atividade 2** para o **grupo 3**, a **Atividade 3 e 4** para o **grupo 4**, a **Atividades 5 e 6** para o **grupo 5** e a **Atividade 7** para o **grupo 1** e, assim sucessivamente, até conseguirmos completar o circuito.

FIGURA 8: Esquema da divisão de grupos para cada significado e atividade.



Fonte: Elaborado pela autora

ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

SIGNIFICADO DE PARTE TODO - ATIVIDADE 1

OBJETIVOS:

- Perceber o significado de fração em relação à **parte-todo**.
- Compreender o que é numerador e denominador.
- Entender que o significado parte todo precisa ser dividido em partes iguais.

A atividade proposta será um problema envolvendo o conceito **parte todo**. Para realizá-la, os alunos precisarão de uma cartolina por grupo, régua, lápis e tesoura.

- 1) (CARVALHO, 2017 adaptada) Uma professora comprou cartolinas para que os alunos realizassem uma certa atividade. Como a cartolina é grande, a professora orientou os alunos a dividirem a cartolina. Como isso pode ser feito?

Orientações:

- a) Pegue uma régua e meça o comprimento da cartolina e divida por três.
- b) Com o auxílio de uma régua e um lápis, faça marcações nos pontos correspondentes ao resultado da divisão.

- c)** Agora, utilizando uma régua e um lápis, faça um tracejado de uma extremidade a outra da cartolina.

Até aqui, queremos auxiliar os alunos a dividirem a cartolina em três partes iguais. Pretendemos que eles percebam que para fazer essas divisões, elas devem ser divididas da mesma forma e tamanho.

- d)** O que vocês estão vendo?

Nessa questão, esperamos que os alunos nos digam que a cartolina foi dividida em pedaços iguais/de mesmo tamanho.

- e)** Matematicamente, o que isso significa?

Esperamos que eles possam dizer que ocorreu uma divisão de três fatias; três retângulos iguais; uma divisão.

- f)** O que é uma fração?

- g)** Consulte no dicionário o que é fração.

- h)** Consulte o livro didático e veja o que ele define como fração.

Com essas questões, queremos que eles pesquisem o que é fração em diferentes locais, percebendo respostas muito semelhantes e que se assemelham ao significado parte-todo, acessando a gramática acerca do tema.

- i)** Quais os elementos de uma fração?

- j)** Como se representa numericamente uma fração?

- k)** O que significa cada elemento (numerador e denominador) de uma fração?

Com essas questões, os alunos poderão ter compreensões sobre numerador e denominador. Ademais, conseguir identificar como é dividida a fração e como podemos pensá-las.

- l)** Fazendo o uso de uma tesoura, recorte uma das partes da cartolina.

A partir dessa questão, pretende-se que os alunos comecem a perceber as partições de uma fração, fazendo com que entendam o que é uma parte do todo ou duas partes. Como irão dividir apenas uma das partes da cartolina, os alunos devem compreender que essa é um terço do todo e as outras duas partes que sobraram são dois terços do todo.

m) Em quantas partes iguais a cartolina foi demarcada/tracejada?

Três partes iguais, é a resposta que esperamos dos alunos.

n) O que representam essas marcações, quando estamos falando de frações?

São as divisões do todo, que neste caso é a cartolina. Essa é a resposta que esperamos que o aluno tenha, a partir das questões propostas.

o) Como podemos representar a parte separada da cartolina, em frações?

Aqui queremos que o aluno perceba que a parte separada da cartolina representa um terço do todo e que podemos representá-la como: $\frac{1}{3}$

p) E a parte que sobrou da cartolina, podemos representar de que forma?

Nessa questão, também esperamos que a resposta seja dois terços, a qual pode ser escrita da seguinte forma: $\frac{2}{3}$

SIGNIFICADO DE MEDIDA - ATIVIDADE 2

OBJETIVOS:

- Perceber o significado de fração em relação à **medida**.
- Escrever medidas com número fracionário e decimal.
- Constatar a necessidade de divisão para medir objetos e compreender o motivo pelo qual utilizamos o número fracionário.

Na atividade do grupo 2, pedimos aos alunos medirem alguns objetivos, possibilitando a compreensão do significado de **medida**. Precisarão utilizar uma régua ou fita métrica, tiras de papel, caderno e lápis para anotações.

2) (SILVA, 2005 adaptada) Siga as orientações abaixo e resolva a atividade.

- a) Você recebeu algumas tiras de papel. Utilize-as para medir o comprimento da sua classe e o comprimento do quadro. Anote as medidas que você encontrar na tabela abaixo.

TABELA 2: Tabela para utilizar na atividade para medir com tiras de papel

OBJETO	MEDIDA
Classe	
Quadro	

FONTE: Elaborado pela autora.

- b) Agora, utilize a régua ou a fita métrica e tire as medidas do comprimento dos mesmos objetos citados na letra a) e anote na tabela abaixo.

TABELA 3: Tabela utilizada na atividade para medir com a régua

OBJETO	MEDIDA
CLASSE	
QUADRO	

FONTE: Elaborado pela autora.

Com essa atividade, pretendemos fazer com que os alunos percebam que as medições do quadro e da classe são diferentes e que as medidas não serão exatas. Por consequência, precisarão utilizar estratégias que os auxiliem a realizar as medições dos objetos.

c) Explique como você utilizou a régua e as tiras de papel para medir os objetos.

Explicar como utilizaram o papel e a régua vai fazer com que os alunos pensem sobre as medidas e digam como as utilizaram. A fim de encontrar a medida, os alunos podem utilizar de dobraduras com a tira de papel, para marcarem a medida que encontraram quando mediram o comprimento dos objetos selecionados. Fazer isso pode remeter ao significado parte todo, onde eles têm partes de um todo, ou seja, as partes são as dobraduras na tira de papel e o todo seria a tira de papel inteira. Para escrever a medida, precisarão pensar em como descrever essa dobradura. Bem como, a fita métrica ou a régua. A medida desses materiais são números decimais, mas também podem ser associados às frações. Nessa parte fica mais simples escrever a medida de cada objeto, visto que podem contar os centímetros e milímetros que contém nessas ferramentas.

d) O que você percebeu, quando mediu com as tiras de papel e quando utilizou a régua ou a fita métrica?

Com essa pergunta, é possível que eles comecem a refletir sobre as dobraduras e sobre os números decimais que irão encontrar ao medir os objetos. E, assim, comecem a relacioná-los com as frações.

e) Que relação essas medidas têm com as frações?

f) Pense e expresse essas medidas em frações.

A partir dessas questões, queremos instigar o aluno a compreender essas medidas como números fracionários e como podem ser reescritas.

g) Você percebeu que as medidas podem ser escritas de diferentes formas? Quais são elas?

Nesta questão queremos que o aluno perceba que foram utilizadas diferentes maneiras para representar a mesma medida, ou seja, as tiras de papéis, das quais fizeram dobraduras. E aos números decimais, que apareceram após a medição com a régua ou a fita métrica.

h) Essas maneiras diferentes de escrever as medidas podem ser consideradas iguais? Explique.

A letra h) permite que o aluno perceba a diferença na escrita, contudo, mesmo sendo escritas de formas diferentes, estão representando um mesmo número ou medida, neste caso.

SIGNIFICADO DE RAZÃO - ATIVIDADES 3 E 4

OBJETIVOS:

- Perceber o significado de fração em relação à **razão**.
- Compreender a existência da escala e proporcionalidade, escritas na forma fracionária.

Nesta atividade, utilizamos questões referentes a comidas, como por exemplo, jarra de suco e receita de bolo. Iremos recorrer a algumas questões norteadoras que podem introduzir o significado de fração em relação à razão. Neste significado, os alunos podem utilizar raciocínios de parte-todo, para dividir as medidas. Porém, raciocínios como o de proporcionalidade também podem aparecer, no caso em que é pedido o aumento ou a redução da receita do bolo.

3) (SILVA, 2004 adaptada) Observe a quantidade de ingredientes usados na receita do bolo de chocolate abaixo:

Massa:

- 4 ovos
- 4 colheres (sopa) de chocolate em pó
- 2 colheres (sopa) de manteiga
- 3 xícaras (chá) de farinha de trigo
- 2 xícaras (chá) de açúcar
- 2 colheres (sopa) de fermento

- 1 xícara (chá) de leite
 - a) Você pode perceber que a cada duas xícaras de açúcar utilizadas, usamos três xícaras de farinha?
 - b) Determine a razão entre açúcar e farinha, utilizados na receita acima.
 - c) Essa razão pode ser escrita como fração? Se sim, por quê?
 - d) Como você pensou para solucionar essa questão? Explique.
- 4)** (SILVA, 2005) Se para fazer uma jarra de refresco utilizamos 3 copos de suco concentrado, para 12 copos de água, qual a razão de suco para água ? Explique o raciocínio que utilizou para realizar esta tarefa.
- a) Expresse essa razão na forma fracionária.

Essas tarefas têm características diferente, pois a relação que utilizamos foi o significado de razão. Mesmo que o raciocínio de parte-todo possa ser utilizado na quarta atividade, o mesmo não acontece quando estamos falando da terceira atividade, pois queremos que os alunos compreendam o significado de razão, ou seja, que duas xícaras de açúcar está para três xícaras de farinha. Percebendo que para fazer qualquer alteração na medida de açúcar ou de farinha, eles precisarão modificar os dois ingredientes em escala, pois ao modificar um necessariamente será preciso modificar o outro, para que a receita fique com as medidas dos ingredientes corretos.

Através das atividades 3 e 4, os alunos podem perceber diferenças entre o significado de parte-todo e de razão. Mesmo que na atividade 4 o raciocínio de parte-todo se faça presente, o mesmo não acontece na atividade três, da qual podemos utilizar a razão. Ou seja, pensamentos que possam auxiliar para diminuir ou aumentar a receita do bolo.

SIGNIFICADO DE QUOCIENTE - ATIVIDADES 5 E 6

OBJETIVOS:

- Perceber o significado de fração em relação ao **quociente**.

- Compreender a relação de divisão com o número fracionário.

Nestas tarefas, usamos questões sobre o significado de fração em relação ao quociente ou divisão. A atividade consiste em dividir pizzas e chocolates para um número x de pessoas. Sugerimos utilizar desenhos de pizzas e barras de chocolate impressos, dando a oportunidade aos alunos para que possam manuseá-las e dividi-las, com o objetivo de realizar as atividades.

5) (SILVA, 2005) Quanto cada pessoa receberá de pizza, se distribuirmos igualmente cinco pizzas entre quatro pessoas?

6) (SILVA, 2005) Quanto cada pessoa receberá de chocolate, se distribuirmos igualmente três barras de chocolates para cinco pessoas?

Orientações:

a) Você recebeu cinco pizzas impressas e três barras de chocolate. Pense em como dividir essas pizzas e o chocolate igualmente, para cada uma das questões acima.

Com esse questionamento, se presume que os alunos pensem e utilizem os materiais manipuláveis, para refletir na divisão que estão fazendo. Os materiais, sendo manipuláveis, podem auxiliar nesse processo, visto que são pizzas e elas precisam ser divididas, de formas iguais, entre todas as pessoas possam comer a mesma quantidade. O mesmo acontece com os chocolates, visualizando essas divisões, pode ficar mais claro o que eles devem fazer até que todos fiquem com a mesma quantidade de comida.

b) Agora, quantos pedaços de pizzas cada uma das quatro pessoas ganhou?

c) E da barra de chocolate, quantos pedaços cada uma das cinco pessoas ganhou?

d) Conte como você pensou para dividir essas comidas, igualmente, para as pessoas, em cada caso.

Fazer com que os alunos apresentem o raciocínio utilizado nas atividades e expliquem o que foi feito, os ajudará a perceber as divisões como número fracionário.

rio. Com isso, podem aparecer várias explicações de como eles fizeram para dividir as pizzas e os chocolates. Essas divisões podem recorrer aos números naturais, visto que a primeira tentativa deve ser: dividir o número de pizzas e chocolates entre o número de pessoas. Dessa forma, entra a questão de dividir em relação aos números fracionários, já que precisamos dividir cada uma das pizzas e cada um dos chocolates, até que todos fiquem com partes iguais.

- e) As questões números 5 e 6 têm algo em comum, explicar o que são e a qual conteúdo matemático estão relacionadas.
- f) Nas questões acima, você teve de dividir pizzas e chocolates entre algumas pessoas. Como podemos escrever estas divisões em frações? Com essas questões, fazer com que os alunos pensem e tentem relacionar as divisões ao número fracionário, tentando fazê-los perceber que é possível escrever a divisão de $5 \div 4$ em $\frac{5}{4}$.

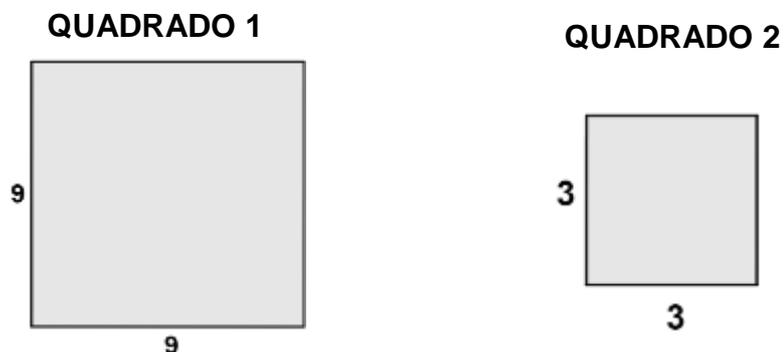
SIGNIFICADO DE OPERADOR - ATIVIDADE 7

OBJETIVOS:

Este grupo deverá realizar uma atividade que está relacionada ao operador multiplicativo, o que pode ser considerado como algo que atua sobre uma quantidade. Desta forma, os alunos deverão realizar atividades que podem diminuir ou aumentar os quadrados. Eles receberão alguns quadrados para tentar manipulá-los, a partir dos operadores.

- 7) (SILVA, 2005 adaptada) Construa um novo quadrado para cada um dos quadrados 1 e 2 abaixo (Figur 9), cujo lado tem $\frac{2}{3}$ da medida do lado do quadrado dado. Lembre-se que o quadrado tem lados iguais, ou seja, se o quadrado tem 9cm, então todos os seus lados também tem 9cm.

FIGURA 9: Quadrados de lados 9cm e 3cm, respectivamente.



FONTE: Elaborado pela autora.

Para que os alunos consigam resolver esta questão, eles precisam entender que $\frac{2}{3}$ atuam no tamanho dos quadrados como um operador que está multiplicando essa medida. Quando perceberem esse processo, irão conseguir construir os novos quadrados com as medidas correspondentes. Pode haver dificuldades na compreensão do que devem fazer com esses $\frac{2}{3}$, visto que o que se pede na questão é construir um quadrado com uma nova medida, que precisa ser considerada a partir do número fracionário que foi dado.

a) Explique o que você pensou e fez para construir os novos quadrados.

Como nas atividades que foram propostas aos outros grupos, pretende-se instigar o aluno a criar e expressar os raciocínios do que foi feito, podendo esquematizá-los e organizá-los de modo que a compreensão das atividades fiquem mais claras.

b) Os quadrados aumentaram ou diminuiram? Por quê?

O objetivo dessa questão é que percebam que o número fracionário $\frac{2}{3}$ vai fazer com que a medida dos quadros diminua, porque esse número é menor que 1, se transformá-lo em um número decimal.

4.3 ETAPA 3 - AVALIAÇÃO

Conteúdos: Frações em seus diferentes significados: parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Objetivos:

- Observar os entendimentos dos alunos em relação aos cinco significados discutidos.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de frações em relação aos cinco significados

Número de Questões: 5 questões

Duração: 1 aula de 50 minutos

Nesta última etapa, iremos propor aos alunos exercícios que possibilitem compreender o que eles aprenderam durante a execução da Sequência Didática. Os alunos deverão utilizar os conhecimentos que foram construídos ao longo das atividades anteriores para realizarem as atividades.

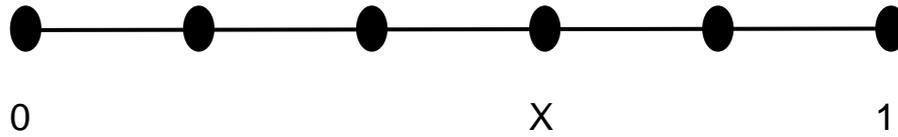
A avaliação pode ainda ser feita na divisão de grupos, pensando em uma forma para que os alunos possam discutir entre si sobre o que aprenderam e o que devem fazer para resolver as atividades.

Sugerimos, também, que, após o término das atividades, o professor corrija e discuta com os alunos as respostas dessas questões, a fim de reforçar a aprendizagem do conceito de frações em relação aos seus cinco significados. Portanto, esta etapa terá um total de cinco questões, sendo uma para cada significado.

A previsão para realização das atividades, contando também com a correção dos exercícios, é de um período de cinquenta minutos cada.

AVALIAÇÃO

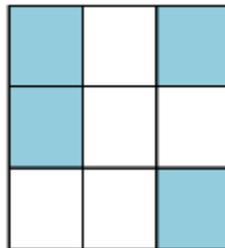
- 1) (SILVA, 2005) Dada uma distância de 0 a 1 na reta numérica, qual a fração que representa o percurso que vai de 0 a X?

FIGURA 10: Reta numérica com distância entre 0 e 1.

FONTE: Elaborado pela autora.

Essa questão se refere ao significado de medida. Como nas atividades que foram trazidas nas etapas 1 e 2, a tarefa pede para que diga a distância entre um ponto e outro. O aluno pode observar que a reta está dividida em cinco partes iguais e, para determinar a distância até o ponto x, precisará pegar três dessas partes, portanto a distância será de $\frac{3}{5}$. Essa questão está diretamente ligada ao significado de parte todo.

- 2) (ADRINI e VASCONCELLOS, 2012) A figura representa um azulejo dividido em 9 partes iguais. Quatro dessas partes estão pintadas. Escreva a fração que representa a parte pintada.

FIGURA 11: Azulejo dividido em nove partes com quatro delas pintadas.

FONTE: Elaborado pela autora.

Aqui, temos o significado de parte-todo e pedimos para que os alunos encontrem a fração que representa a parte pintada desse desenho. Portanto, para que seja possível indicar a fração referida, o aluno deverá compreender que o azulejo tem quadrados de mesmo tamanho, ou seja, divididos em partes iguais e que todas as partes dele são 9 e as partes pintadas são apenas 4. Sendo assim, o numerador dessa fração será o número 4 e o denominador o 9, representado simbolicamente por $\frac{4}{9}$.

- 3) (CARVALHO, 2017) Sabe-se que a distância entre as cidades de Paraíso do Tocantins e Palmas é de aproximadamente 60 km e que, em virtude de uma

reforma na pista, $\frac{3}{4}$ do trajeto está sem a devida sinalização. Quantos quilômetros desse trajeto estão devidamente sinalizados?

O operador multiplicativo presente nesta questão é na relação que temos com a quantidade de quilômetros. O que deve ser compreendido nessa questão, primeiramente, é a descoberta da quilometragem do trajeto que não está sinalizado. Com a intenção de realizar esta operação, os alunos devem observar que multiplicando os 60 km entre as cidades por $\frac{3}{4}$, teremos a quantidade de quilômetros não sinalizados, ou seja, $60 \cdot \frac{3}{4} = \frac{180}{4} = 45$. Temos um trajeto com 45 km sem sinalização. Então, o trajeto que tem a devida sinalização entre Paraíso no Tocantins e Palmas são os 60 km menos os 45 km sem sinalização, o que encontramos através do cálculo mencionado acima, é de 15 km de via sinalizada.

- 4)** (SILVA, 2005) Quantas bolinhas cada menino receberá, se distribuirmos igualmente 16 bolinhas entre três meninos?

O significado de quociente que queremos que os estudantes percebam nesta questão está associado à divisão de bolinhas com pessoas. O fato de ter de dividir 16 bolinhas para três meninos faz com que os alunos pensem na divisão. Mesmo essa divisão não sendo exata, queremos que, assim como na atividade da etapa dois, eles possam associar a escrita com o número fracionário. Com isso eles podem escrever a fração como $\frac{16}{3}$ ou, ainda relacionar 5 bolinhas para cada menino, sobrando somente 1 para ser dividida entre três pessoas, associando a fração $\frac{1}{3}$.

- 5)** (SILVA, 2005) A miniatura de um objeto tem 12 cm de comprimento. Se na realidade esse objeto tem 60 cm de comprimento, qual foi a escala utilizada?

O significado de razão pode aparecer quando estamos relacionando a atividade com escalas. Para realizar a tarefa, os alunos precisam entender o conceito de escala, podendo somente escrevê-la na forma fracionária, da qual a razão será da miniatura do objeto com o tamanho real dele. Sendo capaz de pensar da seguinte forma: 12 para 60, ou seja, a escala utilizada pode ser escrita deste modo: $\frac{12}{60}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino das frações percorre grandes discussões acerca do seu ensino, tanto sobre as dificuldades em aprender e ensinar, quanto à complexidade que cerca o seu conceito. Por conta disso, esta pesquisa procurou elaborar uma Sequência Didática com atividades e estratégias que acreditamos ser capazes de construir o conceito de fração a partir dos cinco significados atrelados a ela.

Optamos por uma metodologia de pesquisa qualitativa de caráter bibliográfico e documental, com o intuito de exprimir discussões acerca deste assunto que dessem subsídios para a elaboração da sequência. Ou seja, as argumentações que trouxemos para elaborar essa sequência de atividades foi sobre sua história, dificuldades, o conceito de frações atrelado a cinco significados e os documentos legais que norteiam a Educação Básica, a fim de entender o que seria necessário para a sua elaboração.

A Sequência Didática foi dividida em três partes. A primeira delas foi a etapa da sondagem, na qual queremos compreender os conhecimentos trazidos pelos alunos sobre o assunto. A etapa dois, conceito de frações e seus diferentes significados, expressa um circuito de atividades e questões que trouxessem possibilidades para entenderem esses significados, com o intuito de construir o conceito de frações. Pensamos em utilizar materiais concretos durante a segunda etapa, com a finalidade de materializar as frações. Todas essas justificativas e elaborações se deram por conta do estudo que fizemos anteriormente sobre as dificuldades ao ensiná-las, possibilitando pensamentos como este para sanar algumas das possíveis dúvidas dos alunos. E, por fim, a terceira etapa, avaliação, da qual trouxemos situações problemas parecidas com as atividades da etapa dois, com o intuito de identificar quais as aprendizagens que os alunos tiveram.

Este é um trabalho que não foi aplicado e, por este motivo, não temos precisão dos resultados que essa Sequência Didática pode trazer para o ensino. Fica o desejo de poder desenvolvê-la em outros momentos, para pôr em prática tudo aquilo que aprendemos e criamos a partir dessas discussões, analisando os resultados.

A partir dessas considerações, acredita-se que a elaboração da Sequência Didática com esses cinco significados podem trazer contribuições para as aulas de

Matemática no sexto ano do Ensino Fundamental, e para o ensino e a aprendizagem dos alunos em relação a esse contexto tão denso que é o número fracionário. Bem como, dar possibilidades aos professores de Matemática para pensarem em suas aulas nesse contexto ou então criar ideias que possibilitem a inserção dos significados durante o ensino do conceito de fração.

REFERÊNCIAS

- ANANIAS, Izabela C.C. **Transformação de frações em números. Uma experiência no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Ciências). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.
- ANDRINI, Álvaro. VASCONCELLOS, Maria J. **Praticando Matemática, 6.** 3º edição, renovada. Editora do Brasil. São Paulo, 2012.
- AQUINO, João P. G. **Frações: uma abordagem pedagógica.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade de Federal Rural Semi-Árido, Mossoró, 2013.
- AVEIRO, José C. **Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2015.
- BERTONI, Nilza E. **A construção do conhecimento sobre número fracionário.** Revista Bolema, Rio Claro. São Paulo. Ano 21, nº 31, p.209-237. 2008.
- BEZERRA, Francisco J. B. **Introdução ao conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** 2018. Disponível em < <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base> > Acesso em: 29 de mar.2020.
- BREITENBACH, Helena M. **Ensino de frações via concepções parte/todo, quociente e medida.** Monografia (Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2010.
- CAMPOS, Tânia M. M. RODRIGUES, Wilson R. **A ideia de unidade na construção do conceito do número racional.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.4, p.68-93, UFSC: 2007.

CARVALHO, Euvaldo de S. **Sequência didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

CAVALIERI, Leandro. **O ensino das frações**. Monografia (Especialização em Ensino da Matemática). Universidade Paranaense, Paraná, 2005.

CINTRA, Camila C. **Proposta para o ensino de frações para o 7º ano: do diagnóstico a aprendizagem mediada por modelo de barras**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil, 2017.

CORREIA, Paola L. **Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

CÔRTEZ, Cleber A. **Formalização dos conjuntos numéricos: contrinuição para o ensino de frações e números decimais**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2015.

COSTA, Sandro H.B. **O ensino das frações no Ensino Fundamental e seu reflexo no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Fundação Universidade do Amapá, Macapá, 2014.

CURTY, Andréia C. Da S. **Números racionais e suas diferentes representações**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2016.

DUFFECK, Adilene P. L. **Cozinhando e calculando: uma estratégia para ensinar matemática com uso de receitas culinárias**. Projeto de pesquisa (Programa de desenvolvimento Educacional). Secretária de Estado da Educação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Colombo, 2014.

FAASEN, Samantha. **Análise de uma proposta pedagógica de construção e aplicação de dominó de frações equivalentes**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, 2017.

GARIBOTTI, Cristiano R. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como ferramenta para o mapeamento do campo conceitual do Cálculo: um estudo dos conhecimentos matemáticos de alunos ingressantes nos cursos de Engenharias Agroindustriais**. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Exatas). FURG/SAP, Rio Grande do Sul, 2019.

GERHARDT, Tatiana E; SILVEIRA, Denise T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, Antônio C. **Como elaborar projeto de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOMES, Antônio E. M. **O estudo de frações em seus diferentes contextos: um diagnóstico com alunos de 6º ano da rede municipal de ensino de Alto Santo – CE**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal Rural de Semi-Árido, Mossoró, 2019.

GOOGLE. **Imagens de pizza - desenhos**. Disponível em: https://www.google.com/search?q=pizza&tbm=isch&chips=q:pizza,g_1:desenho:atBpgvjs9I%3D&rlz=1C1AVFA_enBR801BR801&hl=pt-BR&sa=X&ved=2ahUKEwiFiL6mMLwAhU_OLkGHYdoBAYQ4IYoAHoECAEQGQ&biw=1007&bih=640#imgrc=JpeiEHNPfprpbMM&imgdii=ChxaJBkcZwQvIM. Acesso em: 11 de maio 2021.

KHAN ACADEMY. **Frações na reta numérica**. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic/arith-review-fractions-on-the-number-line/e/relate-number-lines-to-fraction-bars?modal=1&ref=resume_learning. Acesso em: 06 de abr. 2021.

KHAN ACADEMY. **Página Inicial**. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/>>. Acesso em: 01 de set. 2020.

LIMA, Denis G. **Números: algumas atividades lúdicas**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

LIMA, Rafael P. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações: Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do En-**

sino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

MAGINA, Sandra. BEZERRA, Francisco B. SPINILLO, Alina. **Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino.** RBEP, Brasília, v. 90, n. 225, p. 411-432, maio/ago. 2009.

MAMEDE, Ema. **Sobre o ensino e aprendizagem de frações nos níveis elementares de ensino.** Conferência do PROFMAT, Associação de Professores de Matemática, 2011.

MARTINS, Gabriel dal F.; ABREU, Gabriel V. S.; ROZEK, Marlene. **Conhecimentos e crenças de professores sobre a educação inclusiva: revisão sistemática da literatura nacional.** Educação em Revista, Belo Horizonte, v. 36. 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-46982020000100231&lng=pt&nrm=iso&tIng=pt&fbclid=IwAR05zJBivDIyatDRMPtSdYQo3UjRjZpxG7hfmDzhk3szTRc_CM37c3srP8M. Acesso em: 24 ago. 2020

MENDONÇA. Glauce R. de S. **A elaboração e construção de material pedagógico como metodologia do processo ensino aprendizagem de frações e produtos notáveis.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2019.

MENOTTI, Rogéria M. **Frações e suas operações: resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

NASCIMENTO, Roney L. **Aplicação e análise de uma sequência didática sobre frações no Ensino Fundamental II.** Dissertação (Mestrado em Ciências). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

NUNES, Terezinha. Criança pode aprender frações. E gosta!. In: GROSSI, Esther Pillar (Org). **Por que ainda há quem não aprende? A teoria.** Petrópolis: Vozes, 2003

OLIVEIRA, Carlos N. C. **Geração alpha Matemática: ensino fundamental - anos finais, 6º ano.** Org, SM Educação. 2º ed. São Paulo, 2019.

OLIVEIRA, Raquel G. **Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

ONUCHIC, Lourdes R. ALLEVATO, Norma S. G. **As diferentes “personalidades” do número fracional trabalhadas através da resolução de problemas.** Revista Bolema, Rio Claro. São Paulo. . Ano 21, nº 31, p.79-102. 2008.

PARANÁ, Governo do Estado do. Secretaria de Estado da Educação – Departamento de Educação Básica. **Caderno de atividades – Matemática – Anos iniciais do Ensino Fundamental.** Paraná, 2009.

PARANÁ, Governo do Estado do. Secretaria de Estado da Educação – Departamento de Educação Básica. **Caderno de atividades – Matemática – Anos finais do Ensino Fundamental.** Paraná, 2009.

PATRONO, Rosângela M. **A aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do Ensino Fundamental: análise de uma proposta de ensino.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2011.

PEREIRA, Onésimo R. **Uma sequência didática para o ensino de adição de frações.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

PORTO, Francirley M. **Uma engenharia didática para o ensino das operações com frações e com produtos notáveis.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2019.

RIBEIRO, Isabela E. C. **Uma proposta didática com a utilização de jogos, materiais manipulativos e contextualização visando o ensino-aprendizagem de frações.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2019.

RIO DE JANEIRO, Prefeitura Municipal do. Secretaria da Educação. **Material didático carioca – 6º ano – 1º semestre.** Rio de Janeiro, 2020.

RIO DE JANEIRO, Prefeitura Municipal do. Secretaria da Educação. **Material didático carioca – 6º ano – 2º semestre**. Rio de Janeiro, 2020.

RODRIGUES, Willian dos S. **Atividades com robótica educacional para as aulas de matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental: utilização da metodologia LEGO Zoom Education**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Estadual Paulista Julio Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2015.

ROMANATTO, Mauro C. **Número racional: relações necessárias à sua compreensão**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação. Campinas, São Paulo, 1997.

SALES, Marília C. R. **Operações com números inteiros e racionais de forma lúdica**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.

SANTOS, José C. M. **Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SILVA, Maria J. F. **As concepções de números fracionários**. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil, 2004.

SILVA, Maria J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

TUDO GOSTOSO. **A melhor receita de bolo de chocolate**. Disponível em: <https://www.tudogostoso.com.br/receita/62547-a-melhor-receita-de-bolo-de-chocolate.html>. Acesso em: 11 de mai. 2021

VALIO, Denise T. De C. **Frações: estratégias lúdicas no ensino da matemática**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

VIEIRA, Kennedy A. S. **O jogo Duotri: uma possibilidade à compreensão dos números fracionários.** Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2019.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar** [recurso eletrônico]/ Antoni Zabala; tradução: Ernani F. da F. Rosa; revisão técnica: Nalú Farenzena. – Porto Alegre: Penso, 2014.